



## ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

#### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

##### **ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

- A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 9**

- B.**
1. Πότε η ευθεία  $\psi = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ ;

**Μονάδες 3**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λανθασμένη ( $\Lambda$ ):

1. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

**Μονάδες 2**

2. Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$ .

**Μονάδες 2**

3. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  τότε η  $f$  έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα  $f(a)$  και  $f(b)$ .

**Μονάδες 2**

4. Για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  που έχουν συνεχείς παραγώγους στο  $[a, b]$  ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx - \int_\beta^a f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta$$

**Μονάδες 2**

5. Αν για κάθε στοιχείο  $\psi$  του συνόλου τιμών της  $f(x)$ , η  $f(\chi) = \psi$  έχει λύση ως προς  $x$  τότε η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{1}{z} = -1$ ,  $z \in \mathbb{C}$  και  $z_1, z_2$  οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

A.  $z_1 \cdot z_2 = 1$  και  $|z_1|^3 = 1$ .

**Μονάδες 4**

B.  $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$ .

Γ.  $|z_1|^8 + \frac{1}{|z_2|^{10}} + 1 = 0$

**Μονάδες 4**

Δ. Αν  $f(x)$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  με

$$f(0) = 2 = \frac{z_1 + z_2}{z_2} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} = \frac{3}{2}$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$ , ώστε  $f(x_0) = 3x_0 - 2$ .

**Μονάδες 7**

E. Αν Γ είναι η εικόνα του μηδικού  $w = 2z_1 + 2z_2$  και A, B οι εικόνες των  $z_1$  και  $z_2$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + 2 + 2\ln x$ .

A. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κούλη.

**Μονάδες 6**

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

Γ. Αν  $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$  να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 > 0$  ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0) \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Μονάδες 7**

Δ. Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 2$  ισχύει:  $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

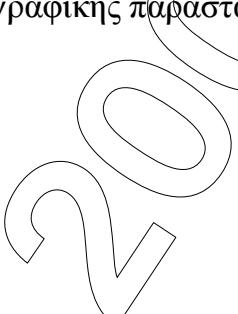
Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(\frac{1}{x}) = \frac{x+1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

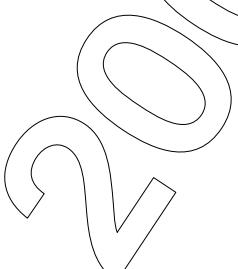
- A. Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$ .


**Μονάδες 8**

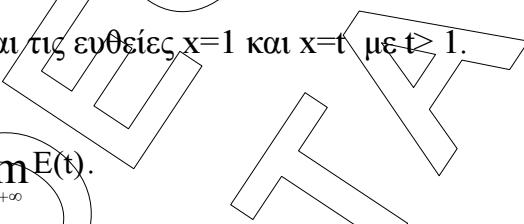
- B. 1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  στο σημείο με τετμημένη  $x = 1$ .


**Μονάδες 2**

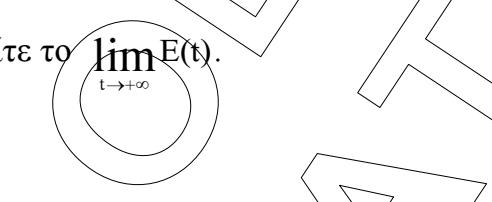
2. Να δείξετε ότι  $\int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$ .


**Μονάδες 7**

- Γ. Αν  $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ , να βρείτε το εμβαδόν  $E(t)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$ , τον  $x'$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=t$  με  $t \geq 1$ .


**Μονάδες 5**

- Δ. Να βρείτε το  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$ .


**Μονάδες 3**