



ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Σχολ. Βιβλίο σελ. 260
- B. 1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 280
2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 191
- Γ. 1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

A. $z + \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = -z \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$ με $z_1 z_2 = 1$ (τύποι Vieta)

(ή $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ $z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και $z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$) και

$z_1^2 + z_1 + 1 = 0 \Rightarrow z_1^3 + z_1^2 + z_1 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -(z_1^2 + z_1) = -1$ ή $z_1^3 = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dots$

B. Οι αριθμοί z_1 και z_2 συζυγείς οπότε $\overline{z_1^{2009}} = \overline{z_1}^{-2009} = z_2^{2009}$

Άρα $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$ σαν άθροισμα συζυγών

Γ. $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = z_1^8 + z_1^{10} + 1 = (z_1^3)^2 \cdot z_1^2 + (z_1^3)^3 \cdot z_1 + 1 = z_1^2 + z_1 + 1 = 0$

Δ. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} - 3x + 2$, συνεχής στο $[0, 1]$ σαν άθροισμα συνεχών (f παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής και $-3x+2$ συνεχής ως πολωνυμική με

$$g(0) = f(0) + 2 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 + 2 = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2}{z_1 z_2} + 4 = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot 1}{1} + 4 = 3 > 0$$

$$\text{και } g(1) = f(1) - 3 + 2 = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{2z_2 + 2z_1}{4z_1 z_2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{4} - \frac{5}{2} = -3 < 0$$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2$$

Ε. $w = 2(z_1 + z_2) = 2(-1) = -2$ δηλαδή $\Gamma(-2,0)$, και $A\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ τότε

$$|\Gamma A| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$|\Gamma B| = \sqrt{\left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

Άρα $|\Gamma A| = |\Gamma B|$

ΘΕΜΑ 3^ο

Α. $f(x) = x + 2 + 2 \ln x$ με π.ό. $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow f \uparrow (0, +\infty)$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2} < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } (0, +\infty)$$

Β. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2 + 2 \ln x) = 0 + 2 - \infty = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 + 2 \ln x) = +\infty + 2 + \infty = +\infty \text{ δηλαδή } f(A) = (-\infty, +\infty)$$

Αφού το $0 \in f(A)$ έχει η $f(x) = 0$ ρίζα x_0 στο $(0, +\infty)$, μοναδική γιατί $f \uparrow (0, +\infty)$

Γ. Θέλω $g(x) \geq g(x_0)$ δηλαδή η g να έχει ελάχιστο στο x_0 . Έχω

$$g'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x + 2) - x \ln x}{(x + 2)^2} = \frac{x \ln x + 2 \ln x + x + 2 - x \ln x}{(x + 2)^2} = \frac{2 \ln x + x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{f(x)}{(x + 2)^2}$$

$$\text{Αν } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

		x_0	
x			
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$	↘		↗
		ελ	

άρα η $g(x)$ έχει ελάχιστο στο x_0 δηλαδή $g(x) \geq g(x_0)$

Δ. Θέλω $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4) \Leftrightarrow f(x+4) - f(x+1) < f(x+1) - f(x-2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)} < \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)}$$

έχω από Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x+1, x+4)$ και $\xi_2 \in (x-2, x+1)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x+4) - f(x+1)}{(x+4) - (x+1)} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x-2)}{(x+1) - (x-2)} \quad \text{δηλαδή θέλω}$$

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$$

Όμως f κοίλη στο $(0, +\infty)$ δηλαδή $f' \downarrow (0, +\infty)$ και $0 < x-2 < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+4$

Θα είναι $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4^ο

Α. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \left(e^{-x} \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x} + c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f(1) = \frac{1}{e} + c \Rightarrow c=0$$

$$\text{Άρα } f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{-x} \frac{1}{x}$$

$$\text{Έστω } \frac{1}{x} = \omega \text{ τότε } x = \frac{1}{\omega}, \omega \in (0, +\infty). \text{ Άρα } f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}$$

$$\text{Τελικά } f(x) = x e^{-1/x}, x \in (0, +\infty).$$

2^η λύση:

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}, x > 0$$

$$\text{Θέτω } \frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x = \frac{1}{\omega} > 0$$

$$\text{Άρα } f'(\omega) = \left(\frac{1}{\omega} + 1\right) e^{-1/\omega} \Rightarrow f'(\omega) = (\omega e^{-1/\omega})' \Rightarrow f(\omega) = \omega e^{-1/\omega} + c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } \omega=1 \text{ άρα } f(1) = e^{-1} + c \Rightarrow c=0$$

$$\text{Άρα } f(\omega) = \omega e^{-1/\omega}, \omega > 0 \text{ ή } f(x) = x e^{-1/x}, x > 0$$

Β.

$$1. \text{ Είναι } f'(x) = e^{-1/x} + xe^{-1/x} \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(1) = \frac{2}{e}, \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \quad (\varepsilon)$$

$$2. \text{ Είναι: } f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} > 0 \quad \text{για } x > 0.$$

Άρα η $f(x)$ είναι κυρτή στο $\in (0, +\infty)$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός του σημείου επαφής.

$$\text{Είναι } f(x) \geq \frac{2}{e}x - \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e} \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in [1, 2]$$

$$\text{Άρα } \int_1^2 (f(x) - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}) dx > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 (-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}) dx > 0 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx + [-\frac{2}{e}x + \frac{1}{e}]_1^2 > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx - \frac{2}{e} > 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$$

Γ.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{e^{-1/x}}{x^2} > 0 \quad \text{στο } [1, t]$$

$$\text{Άρα } E = \int_1^t g(x) dx = \int_1^t \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx = [e^{-1/x}]_1^t = e^{-1/t} - e^{-1} \quad \text{τ.μ.}$$

Δ.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-1/t} - e^{-1}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (e^{\omega} - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$$

$$(\text{Έστω } -\frac{1}{t} = \omega, \text{ όταν } t \rightarrow +\infty \text{ τότε } \omega \rightarrow 0)$$