ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία- Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 76

Α2. α) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 155
β) Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 216

Α3.

a) Σ

b) Σ

c) Λ

d) Λ

e) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},\quad x\ge 1$$

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}},\quad x\ge 1$$

- $D_g\cap D_h=[1,+\infty)\ne\varnothing$ και $h(x)\ne 0\Leftrightarrow \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ne 0\Leftrightarrow \sqrt{x}\ne\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x\ne 1$

άρα $D_{\frac{g}{h}}=(1,+\infty)$, και τύπο $f(x)=\left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}^2-1}{\sqrt{x}}}=$

$=\frac{x+1}{x-1},\quad x\in(1,+\infty)$

- Για $x\in D_g\cap D_h=[1,+\infty)$

$$r(x)=(g\cdot h)(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}^2-\frac{1}{\sqrt{x}^2}=x-\frac{1}{x},\ x\in[1,+\infty)$$

B2. Έστω $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ όπου

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y\cdot(x-1) = x+1 \Rightarrow yx - y = x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yx - x = y+1 \Rightarrow (y-1)\cdot x = y+1 \overset{y\neq 1}{\Rightarrow} x = \frac{y+1}{y-1}, \quad y \neq 1$$

Όμως $x > 1$ άρα $\frac{y+1}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Rightarrow y > 1$

Άρα τελικά, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$

$$\left.\begin{array}{l} D_{f^{-1}} = D_f = (1,+\infty) \\ f^{-1}(x) = f(x), x \in (1,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1} = f$$

B3. Η r είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Ελέγχουμε πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \quad (1)$ για $x \in (1,+\infty)$ και $x \in D_r = [1,+\infty)$, άρα τελικά $x \in (1,+\infty)$.

Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x$, για $x \in (1,+\infty)$, άρα

$$(1) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4, \text{δεκτή} \quad \text{ή} \quad x = 1, \text{απορρίπτεται} \quad \text{ή} \quad x = -1, \text{απορρίπτεται} \quad \text{αφού} \quad x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^{\lambda}, & 0 \le x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \ge 2 \end{cases}$$

Γ1. Για να είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = e^{\lambda} \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+}\left(-x^2 + 4x - 3 + \lambda\right) = 1 + \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{\lambda} = 1 + \lambda$$

Θέτω $g(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R}$

προφανής ρίζα για

$x = 0: \; g(0) = e^0 - 1 = 0 = 0$

$g'(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\boxed{0}$	$+$
$g(x)$	$\searrow$	Ο.Ε $g(0) = 0$	$\nearrow$

Η C_g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο όταν $x = 0$ το $g(0) = 0$. Οπότε

$g(x) \ge g(0)$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, μοναδική

Γ2. Για $\lambda = 0$, $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^0, & 0 \le x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \ge 2 \end{cases}$ ή

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \le x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & 0<x<2\\ -2x+4, & x>2\end{cases}$$

Για $x\in(0,2): f'(x)<0,$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x\in(2,+\infty): f'(x)<0 \Leftrightarrow -2x+4<0 \Leftrightarrow -2x<-4 \Leftrightarrow x>2$

x	0	2 $+\infty$
f'	$-$	$-$
f	↘	↘

Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=5$.

Γ3. i) $f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3, & x\ge 2\end{cases}$ και $f(2)=8-4-3=1$

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα και συνεχής στο $[0,3]$.

$$\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, οπότε δεν ικανοποιείται το Θ.Μ.Τ.

ii) $f(0)=5$, άρα $\Delta(0,5)$

$f(3)=0$, άρα $E(3,0)$, $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{y_\Delta-y_E}{x_\Delta-x_E}=-\dfrac{5}{3}$, άρα αρκεί ν.δ.ο. υπάρχει

$\xi\in(0,3): f'(\xi)=-\dfrac{5}{3}$

$$\text{Για}\quad \left.\begin{aligned} x\in(0,2): f'(x)&=-2\\ f'(x)&=-\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow -2=-\frac{5}{3},\quad \text{αδύνατο}$$

Για $x \in (2,3): f'(x) = -2x + 4$
$\left.\begin{matrix} \\ f'(x) = -\frac{5}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow -2x + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -6x + 12 = -5 \Leftrightarrow -6x = -17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{6} < 3$

Οπότε, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (2,3): f'(\xi) = -\frac{5}{3}$

Γ4. Έχουμε:

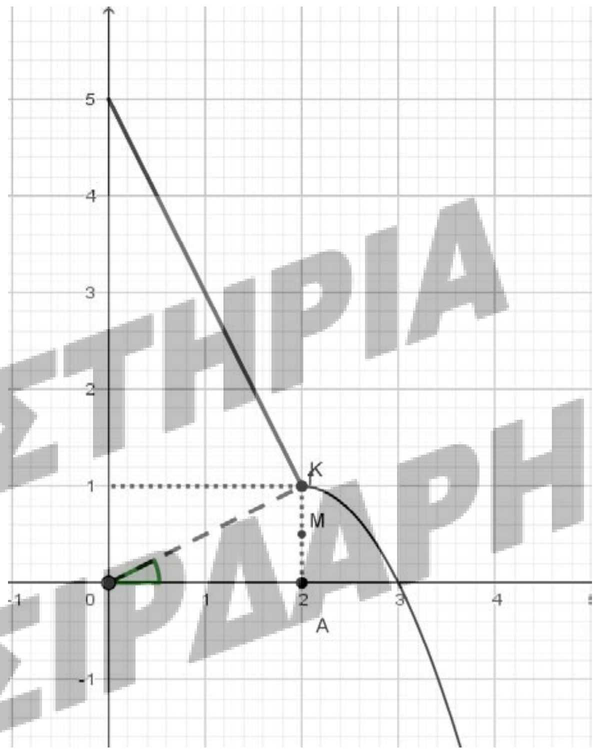
$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{2}$ άρα

$\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$

$\left(\varepsilon\varphi\omega(t)\right)' = \left(\frac{y(t)}{2}\right)' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{4}\omega'(t_0) = \frac{\frac{1}{2}}{2} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} rad/\sec$



Από το Π.θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ, προκύπτει ότι $OK = \sqrt{5}$ άρα

$\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega(t) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

x	0		e		$+\infty$
f'		+	0	-	
f		$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Η $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \alpha$, $x > 0$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^{x}}$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$$

Για $x=e$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο τη τιμή $f(e)=\frac{\ln e}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+\alpha$.

Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $f\left((0,+\infty)\right)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$, πρέπει

$$1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$$

Δ2.i) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1 \quad , x>0$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=-\ln 4+\ln e=\ln\frac{e}{4}<0$
- $f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=1>0$

από Θ.Β. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq(0,e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ άρα και 1-1, οπότε το x_0 μοναδική ρίζα.

- Στο $A_2=[e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής άρα

  $f(A_2)=f\left([e,+\infty)\right)\overset{f:\searrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(e)\right]=\left(0,\frac{1}{e}+1\right]$, Όμως το $0\notin f\left([e,+\infty)\right)$, άρα η $f(x)=0$ αδύνατη στο $A_2=[e,+\infty)$.

  Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}^{*} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

$$^{*}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} + 1 = \frac{1}{e} + 1$$

Δ3. i) $f(x) = f(4)$ έχει προφανείς ρίζες τις $x = 2, x = 4$

- $x = 2, \quad f(2) = f(4)$ με

$$\left.\begin{aligned} f(2) &= \frac{\ln 2}{2} + 1 \\ f(4) &= \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(2) = f(4)$$

- $x = 4, \quad f(4) = f(4)$

θεωρώντας $\varphi(x) = f(x) - f(4), \quad x > 0$

$\varphi'(x) = f'(x)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Για $x = 2 \in (0, e]$, άρα μοναδική ρίζα, ομοίως για $x = 4 \in [e, +\infty)$, άρα μοναδική ρίζα , επομένως $\varphi(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

ii)

$$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \ge \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \ge \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \ge f(2)$$

x	0	2		e		4		$+\infty$
$[2,e]\ f'$	+		+	O.M.	-	0	−	

Ισχύει $f(2) = f(4)$,

αν $x \in (0, e] : f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow \overset{f:\nearrow}{\Leftrightarrow} x \ge 2$, άρα $x \in [2, e]$

αν $x \in [e,+\infty) : f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \overset{f:\searrow}{\Leftrightarrow} x \leq 4$, άρα $x \in (e,4]$,

Οπότε έχει λύση στο διάστημα $[2,e] \cup (e,4] = [2,4]$.

Δ4. $E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f(e^x) \cdot \dfrac{1-x}{e^x} \right| dx$

Θέτουμε:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\text{Για} \quad x = -\ln 2 \Rightarrow u_1 = e^{-\ln 2} = e^{\ln 2^{-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για} \quad x = 0 \Rightarrow u_2 = e^0 = 1$$

άρα, γίνεται:

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u} \right| \frac{du}{u} \overset{u>0}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} \right| du$$

λόγω Δ2 η $f(x) = 0$ έχει ρίζα $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, κι αφού

f : γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ άρα,

για κάθε $x > x_0 \overset{f:\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$

για κάθε $x < x_0 \overset{f:\nearrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x) < 0$

Επομένως, γράφεται:

$$E(\Omega) = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du = I_1 + I_2$$

$$I_1 = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} \left(\frac{\ln u}{u} + 1 \right) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} du = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} \left(\frac{\ln u}{u} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\ln u}{u} + 1 \right)' du = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) f'(u) du =$$

$$= -\left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} = -\cancelto{0}{\frac{f^2(x_0)}{2}} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

$$\text{Ομοίως,} \quad I_2 = \int_{x_0}^{1} f(u) \cdot f'(u) du = \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^{1} = \frac{f^2(1)}{2} - \cancelto{0}{\frac{f^2(x_0)}{2}} = \frac{1}{2}$$

άρα $E(\Omega) = I_1 + I_2 = \dfrac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\ln^2\dfrac{e}{4} + \dfrac{1}{2}\right)$ τ.μ.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα θέματα των φετινών Πανελληνίων έχουν διδαχθεί και είναι παρόμοια με τις παρακάτω ασκήσεις που βρίσκονται στα βιβλία μας, ΤΟΜΟ Α΄ ΚΑΙ Β΄:

ΤΟΜΟΣ Α΄:Σελ. 64, Ασκήσεις 44 & 46 , σελ. 126: Άσκηση 224(ν), σελ. 138: Άσκηση 290, σελ. 331: Άσκηση 711, , σελ. 464: Άσκηση 1007

ΤΟΜΟΣ Β΄:Σελ. 23 Άσκηση 1153, Σελ. 171 Άσκηση 1488, Σελ. 244 Άσκηση 1761(ii), Σελ. 245 Ασκήσεις 1767 & 1768